2019年浙江省大学生物理创新竞赛
理论竞赛卷评分参考答案.

2019.12.28

一、选择题：（单选题，每题4分，共40分）

1．A　2．C　3．C　4．C　5．B　6．B　7．D　8．B　9．D　10．B

二、填空题：（10题，每题4分，共40分）

1．$kR^2(1-\dfrac{\pi}{4})$

2．1.28×10^4 J

3．$y=A\cos\left[2\pi\dfrac{t}{T}+\varphi\right]$，$y=A\cos\left[2\pi\left(\dfrac{t}{T}+\dfrac{x}{\lambda}\right)+\varphi\right]$

4．1300 Hz，0.21 m

5．5.81×10^{-13}J，8.04×10^{-2}

6．$\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{3}{4}$，0

7．$\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0(d-l)^2}$，沿 x 轴反方向

8．$2BIR$，方向向上

9．相同（或$\dfrac{1}{2}B\omega R^2$），由中心沿径向向外

10．$\dfrac{\varepsilon_0 Vu}{x^2}$，向左

三、计算题：（5题，共80分）

1．（本题15分）

解 （1）粒子所受的磁力与其运动速度方向始终垂直，是法向力，不改变速度的大小；阻力始终与速度方向相反，是切向力.

在切向上，有　$f=-kv$

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{f}{m}=-\frac{k}{m}v$$　2分

得　$$\frac{\mathrm{d}v}{v}=-\frac{k}{m}\mathrm{d}t$$

t（>0）时刻粒子的速率为　$v=v_0e^{-\frac{k}{m}t}$　3分

粒子经过的路程为

$$s=\int_0^t v dt=-v_0\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\Big|_0^t=v_0\frac{m}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$$　3分

（2）在法向上，有 $F_B = qvB$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{F_B}{m} = \frac{qvB}{m} \qquad 2\text{ 分}$$

得 $$\rho = \frac{mv}{qB}$$

又有 $$\rho = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = \frac{v\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}$$

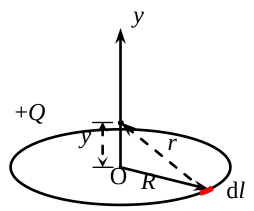
得 $$\mathrm{d}\theta = \frac{v\mathrm{d}t}{\rho} = \frac{qB}{m}\mathrm{d}t\,, \qquad \theta = \frac{qB}{m}t \qquad 2\text{ 分}$$

当粒子的运动方向相对初始方向恰好转过 π 时，有 $t = \dfrac{m\pi}{qB}$ 1 分

此时的速率为 $$v = v_0 e^{-\frac{k\pi}{qB}} \qquad 2\text{ 分}$$

2.（本题 15 分）

解：（1）求电场



解法一：圆环上任一段圆弧 dl 在离 O 点为 y 处所产生的电势为：

$$\mathrm{d}U = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 (y^2+R^2)^{1/2}} = \frac{\lambda \mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 (y^2+R^2)^{1/2}}$$

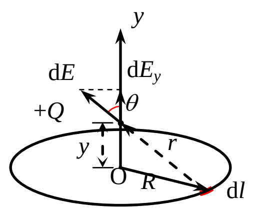
圆环在离 O 点为 y 处所产生的电势为：

$$U = \int \mathrm{d}U = \int_0^{2\pi R} \frac{\lambda \mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 (y^2+R^2)^{1/2}} = \frac{2\pi R\lambda}{4\pi\varepsilon_0 (y^2+R^2)^{1/2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (y^2+R^2)^{1/2}}$$

由于电场强度水平面分量为零，圆环在离 O 点为 y 处所产生的电场为：

$$E = E_y = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{(y^2+R^2)^{3/2}} \qquad 5\text{ 分}$$

方向如图所示.



解法二：圆环上任一段圆弧 dl 在离 O 点为 y 处所产生的电场为：

$$\mathrm{d}E = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 (y^2+R^2)} = \frac{\lambda \mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 (y^2+R^2)}$$

由于电场强度水平面分量为零，圆环上任一段圆弧 dl 在离 O 点为 y 处所产生的电场 y 分量为：

$$\mathrm{d}E_y = \mathrm{d}E\cos\theta = \frac{\lambda \mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 (y^2+R^2)}\frac{y}{(y^2+R^2)^{1/2}} = \frac{y}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}l}{(y^2+R^2)^{3/2}}$$

圆环上任一段圆弧 dl 在离 O 点为 y 处所产生的电场为：

$$E = E_y = \int \mathrm{d}E_y = \int_0^{2\pi R} \frac{y}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}l}{(y^2+R^2)^{3/2}} = \frac{y}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda 2\pi R}{(y^2+R^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{(y^2+R^2)^{3/2}}$$ 5分

方向如图所示.

（2）求电荷运动方程

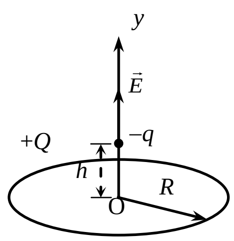
由于负电荷$-q$处在正电荷Q的电场中运动，它在离O点为y处所受的电场力为

$$\vec{F}=-q\vec{E}$$

故静电力为 $$F=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qqy}{(y^2+R^2)^{3/2}}$$

如果以环心为坐标原点，向上的方向为y轴正方向，按牛顿第二定律可得油滴的运动微分方程为

$$F=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qqy}{(y^2+R^2)^{3/2}}=ma$$ 2分



由题设条件h<<R，有$y\le h$<<R，故

$$F\approx-\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0R^3}y=ma$$

于是： $$a=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0R^3}\frac{Qq}{m}y$$ 2分

故油滴作简谐振动，振动角频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0R^3}\frac{Qq}{m}}$$ 2分

设油滴的运动方程为

$$y=A\cos(\omega t+\varphi)$$

由初始条件：

$$y\big|_{t=0}=y_0=h，\quad v\big|_{t=0}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=v_0=0$$

得振幅 $$A=\sqrt{y_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}=h$$ 2分

初相 $\tan\varphi=-\frac{v_0}{\omega y_0}=0$，且$y_0>0$

故 $\varphi=0$

油滴的运动方程为

$$y=h\cos\left(\sqrt{\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0R^3m}}\,t\right)$$ 2分

3.（本题20分）

解：(1) 弹性球在水平面上作纯滚动

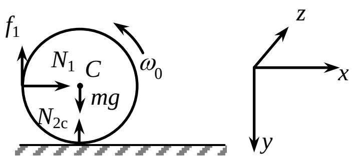
由纯滚动条件： $v_0=\omega_0R$ 2分

碰撞时球与水平面的摩擦可以忽略，且碰撞过程中的相互作用力为恒力则

动量定理： $N_1\Delta t = mv_0-(-mv_0)=2mv_0$ 2 分

角动量定理： $f_1R\Delta t=\mu N_1R\Delta t=J_C\omega-(-J_C\omega_0)$ 2 分

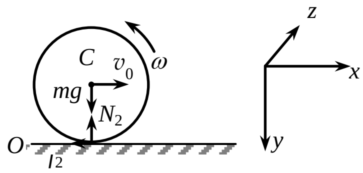
$$J_C=\frac{2}{5}mR^2$$



得： $$\mu R\cdot 2mv_0=\frac{2}{5}mR^2(\omega+\omega_0)$$

$$\omega=\frac{5\mu v_0}{R}-\frac{v_0}{R}=\frac{5\mu-1}{R}v_0$$ 2 分

碰撞后，小球连滚带滑



牛顿第二定律： $mg-N_2=0$

$$f_2=-\mu N_2=ma$$

得 $$a=\frac{-\mu mg}{m}=-\mu g$$ 2 分

转动定律： $$M_2=f_2R=\mu mgR=J_C\beta=\frac{2}{5}mR^2\beta$$

得： $$\beta=\frac{5\mu g}{2R}$$ 2 分

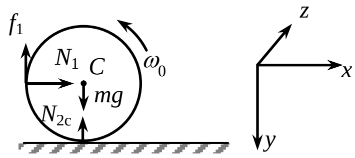
小球速度： $v=v_0+at=v_0-\mu gt$

小球角速度： $$\omega'=\omega+\beta t=\frac{5\mu v_0}{R}-\frac{v_0}{R}+\frac{5\mu g}{2R}t=\frac{5\mu-1}{R}v_0+\frac{5\mu g}{2R}t$$

纯滚动条件： $v=\omega' R$

$$v_0-\mu gt=(\frac{5\mu-1}{R}v_0+\frac{5\mu g}{2R}t)R=(5\mu-1)v_0+\frac{5\mu g}{2}t$$

得： $$t=\frac{2}{7\mu g}(2-5\mu)v_0$$



此时的球心速度：

$$v_t=v_0-\mu gt=v_0-\mu g\frac{2}{7\mu g}(2-5\mu)v_0=\frac{(3+10\mu)}{7}v_0$$ 2 分

方向水平向右

(2) 碰撞时

牛顿第二定律： $mg-N_{2c}-f_1=0$ 2 分

而： $$f_1=\mu N_1=\mu\frac{2mv_0}{\Delta t}$$

$$N_{2c}=mg-f_1=mg-\mu\frac{2mv_0}{\Delta t}\geq 0$$ 2 分

得： $$\mu\leq\frac{g\Delta t}{2v_0}$$ 2 分

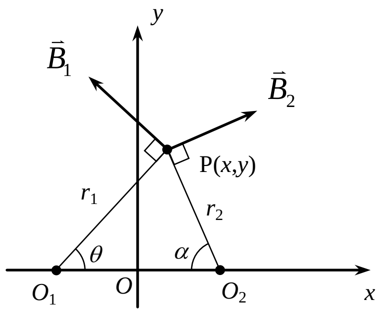
4．（本题 15 分）

解: 空白区域内的磁场可以看作是两根完整的流有反向电流的圆柱形长直载流导体所产生的磁场之和.

通过圆柱形长直载流导体横截面单位面积的电流（即电流密度）为：

$$J=\frac{I}{(\pi/12+\sqrt{3}/8)D^2} \qquad 2\text{分}$$

如图所示：取空白区域的中心为原点建立坐标，在空白区域任意取一点 $P(x,y)$，该点到左边圆柱体中心轴线的距离为 r_1，$P(x,y)$到右边圆柱体中心轴线的距离为 r_2.



先考虑左边载流圆柱体的场, 若电流沿 z 轴正方向（图中垂直纸面向外）流动，由安培环路定理：

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\mu_0\sum_i I_i \qquad 2\text{分}$$

可得：
$$B_1 2\pi r_1=\mu_0 J\pi r_1^2 \quad ;$$

$$B_1=\frac{\mu_0 J r_1}{2}\text{，方向如图所示} \qquad 2\text{分}$$

所以

$$\vec{B}_1=-\frac{\mu_0 J r_1}{2}\sin\theta\,\vec{i}+\frac{\mu_0 J r_1}{2}\cos\theta\,\vec{j}=-\frac{\mu_0 Jy}{2}\vec{i}+\frac{\mu_0 J(x+\frac{D}{4})}{2}\vec{j} \qquad 2\text{分}$$

同理可得右边载流圆柱体（电流沿 z 轴反方向）的场：

$$B_2=\frac{\mu_0 J r_2}{2} \qquad 2\text{分}$$

$$\vec{B}_2=\frac{\mu_0 J r_2}{2}\sin\alpha\,\vec{i}+\frac{\mu_0 J r_2}{2}\cos\alpha\,\vec{j}=\frac{\mu_0 Jy}{2}\vec{i}+\frac{\mu_0 J(\frac{D}{4}-x)}{2}\vec{j} \qquad 2\text{分}$$

$$\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2=\frac{\mu_0 JD}{4}\vec{j}=\frac{6\mu_0 I}{(2\pi+3\sqrt{3})D}\vec{j} \qquad 3\text{分}$$

5．（本题 15 分）

解：（1） $E=2Blv_\mathrm{m}$ 2 分

$v_\mathrm{m}=l\omega$ 2 分

$$I=\frac{2Blv_m}{R}$$

$$P=I^2R=\frac{4(Bl^2\omega)^2}{R}=0.1\,\mathrm{W} \qquad 2\text{分}$$

（2） $F=F_A$

$F+F_A=-kx_0$ 2 分

$$F_{\mathrm{A}} = -\frac{1}{2}kx_0 = -\frac{1}{2}\omega^2 m x_0 = \frac{1}{2}\omega^2 ml\cos\omega t$$ 2 分

$$F_{\mathrm{A}} = -\frac{(B2l)^2 v}{R} = -\frac{(B2l)^2}{R} l\omega\sin\omega t$$ 2 分

$$\frac{1}{2}\omega^2 ml\cos\omega t = -\frac{(B2l)^2}{R} l\omega\sin\omega t\text{；}$$

$$\tan\omega t = -\frac{R\omega m}{8B^2l^2} = -1$$

$$t = \begin{cases} n\pi + \dfrac{3\pi}{8} \\ n\pi + \dfrac{7\pi}{8} \end{cases} \quad n\text{为正整数}$$ 3 分

四、附加题：（2 题，共 40 分）

1．（本题 20 分）

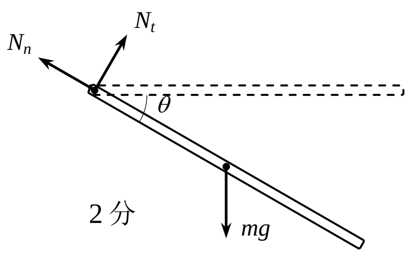
解　（1）如图，设当棒由水平位置转过θ角时，质心的坐标为(x_0, y_0)，速度为$\boldsymbol{v}_{C0}$，角速度为ω．棒绕O点的转动惯量为

$$J_O = \frac{1}{3}ml^2$$ 2 分

由几何关系，有　$x_0 = -\frac{l}{2}\cos\theta$，$y_0 = \frac{l}{2}\sin\theta$

由机械能守恒定律，有　$mgy_0 = \frac{1}{2}J_O\omega^2$　2 分

由①②③式得角速度为　$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}\sin\theta}$



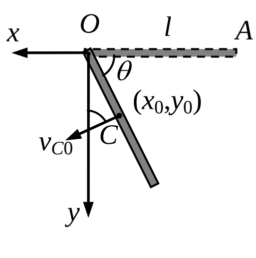
质心速度为　$v_{C0} = \frac{1}{2}\sqrt{3gl\sin\theta}$

法向，由牛顿第二定律，

$$N_n - mg\sin\theta = ma_n$$ 2 分

$$a_n = \omega^2\frac{l}{2}$$ 1 分

$$N_n = mg\sin\theta + m\omega^2\frac{l}{2} = \frac{5}{2}mg\sin\theta$$



切向，由牛顿第二定律

$$mg\cos\theta - N_t = ma_t$$ 2 分

$$a_t = \beta\frac{l}{2}$$ 1 分

由转动定律：

$$M = J\beta \qquad 2分$$

$$\beta = \frac{M}{J} = \frac{3g\cos\theta}{2l}$$

$$N_t = mg\cos\theta - m\beta\frac{l}{2} = \frac{1}{4}mg\cos\theta$$

$$N = \sqrt{N_n^2 + N_t^2} = mg\sqrt{\frac{25}{4}\sin^2\theta + \frac{1}{16}\cos^2\theta} = mg\sqrt{\frac{99}{16}\sin^2\theta + \frac{1}{16}}$$

显然当θ=90°时，N 最大　　$N_{\max} = \frac{5}{2}mg$　　2 分

（2）设转轴最大承受作用力为：$N = kmg$

$$N = mg\sqrt{\frac{99}{16}\sin^2\theta + \frac{1}{16}} = kmg \qquad 3分$$

$$\sin\theta = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{16k^2-1}{11}}，\quad \cos\theta = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{25-4k^2}{11}}$$

$$\theta = \arcsin\sqrt{\frac{16k^2-1}{99}} \qquad 3分$$

2．（本题 20 分）

解：

a)．每个电子所受的力：　$F = k\frac{Ze^2}{r^2} - k\frac{e^2}{4r^2}$，方向指向原子核。　2 分

b)．电子作圆周运动，上面计算所得的合力为向心力：

$$m\frac{v^2}{r} = k\frac{e^2}{r^2}(Z - \frac{1}{4}) \qquad 2分$$

电子轨道运动的速率为：　$v = \sqrt{\frac{ke^2}{mr}(Z - \frac{1}{4})}$　　2 分

c)．基态：　　角动量　　$L = \hbar$　　2 分

$$(mvr)^2 = \hbar^2 = m^2r^2\left(\frac{ke^2}{mr}(Z - \frac{1}{4})\right)$$

得玻尔半径：　$r = \frac{4\hbar^2}{mke^2(4Z-1)}$　　2 分

d)．　$E = K + U = mv^2 - 2k\frac{Ze^2}{r} + k\frac{e^2}{2r} = \frac{ke^2}{r}(Z - \frac{1}{4}) - \frac{ke^2}{r}(2Z - \frac{1}{2})$

$$= -\frac{ke^2}{r}(Z - \frac{1}{4}), \qquad 2分$$

代入 r

得：　　　　$$E=-\frac{mk^2e^4}{\hbar^2}(Z-\frac{1}{4})^2$$　　　　2 分

e)．1 个电子的总能量：$E_1=\frac{1}{2}mv_1^2-k\frac{Ze^2}{r}$，其中 $v_1^2=k\frac{Ze^2}{mr}$

$$E_1=\frac{1}{2}k\frac{Ze^2}{r}-k\frac{Ze^2}{r}=-\frac{Zke^2}{2r}$$

相应的角动量量子化条件：$mrv_1=\hbar$

得：$r=\frac{\hbar^2}{kmZe^2}$，代入 E_1，得：　　$E_1=-\frac{mZ^2k^2e^4}{2\hbar^2}$　　　　2 分

第一个电子的电离能　　$\Delta E_1=E_1-E=-\frac{mZ^2k^2e^4}{2\hbar^2}+\frac{mk^2e^4}{\hbar^2}(Z-\frac{1}{4})^2$

$$=\frac{17}{16}\frac{mk^2e^4}{\hbar^2}$$

第二个电子的电离能：$\Delta E_2=-E_1=\frac{2mk^2e^4}{\hbar^2}$

而　$E=\frac{1}{2}\frac{mk^2e^4}{\hbar^2}=13.6\text{ eV}$，可得：

$\Delta E_1=28.9\text{ eV}$　　　　2 分

$\Delta E_2=54.4\text{ eV}$　　　　2 分

注：$k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$